Практическое занятие. Тема 9

Производная функции. Правила дифференцирования. Вычисление производных

Вопросы

1. Производная функция. Геометрический смысл.
2. Дифференцируемость функции одной переменной. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функций.
3. Основные правила дифференцирования одной переменной.
4. Таблица производных основных функций.
5. Производная обратной и сложной функции.
6. Теорема Ролля и Лагранжа. Геометрическая интерпретация этих теорем.
7. Различные виды неопределенности.
8. Теорема Лопиталя.
9. Дифференциал функции. Геометрический смысл.
10. Инвариантность дифференциала 1-го порядка

Производная. Правила и формулы дифференцирования.

Определение. Приращением функции $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx - приращение аргумента *x*.

$$\Delta y / \Delta x = tg\beta\,. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю, то этот предел называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке x* и обозначается одним из следующих символов: $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,. \qquad (2)$$

Если указанный в формуле (2) предел существует, то функция *f(x)* является *дифференцируемой в точке x*; операция нахождения производной y' называется *дифференцированием функции* $y = f(x)$.

Из равенства (1) и определения производной (см. формулу (2)) следует, что производная в точке *x* равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке *M(x,y)* к графику функции $y = f(x)$.

Легко показать, что с физической точки зрения производная $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке *x* относительно аргумента *x* .

Если C – постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$- некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\left(v \neq 0\right)$;

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}\left(v \neq 0\right)$;

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$- сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u u'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = p(y)$ и $\dfrac{dp}{dy} = p'(y) \neq 0$, то

$f'(x) = 1/p'(y)$.

Таблица производных

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций:*

1) $\left(u^a\right)' = au^{a-1}u' \quad \left(a \in \mathbf{R}\right)$;

2) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$;

3) $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

4) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a}u'$;

5) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$;

6) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;

9) $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

12) $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$;

13) $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$;

14) $\left(shu\right)' = chu \cdot u'$;

15) $\left(chu\right)' = shu \cdot u'$;

16) $\left(thu\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u}u'$;

17) $\left(cthu\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u}u'$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \left(f'(x_0) \neq 0\right).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x=x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Пример1. Найти производную функции $y = \dfrac{2x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (2)).

При любом приращении Δx имеем:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x+1)}-\frac{2x}{3x+1}=\frac{6x^2+6x\Delta x+2x+2\Delta x-6x^2-6x\Delta x-2x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)}=$$

$$=\frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)},$$

то $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}=\frac{2}{(3x+1)^2}$.

<u>*Пример 2.*</u> Найти значение производной функции $y=|x|$ в точке x=0.

При любом приращении независимой переменной x равном Δx, приращение функции в точке x=0.

$$\Delta y=|\Delta x|=\begin{cases}-\Delta x, & если \Delta x\langle 0,\\ \Delta x, & если \Delta x\rangle 0.\end{cases}$$

Из определения производной следует, что

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & если \Delta x\langle 0,\\ 1, & если \Delta x\rangle 0.\end{cases}$$

Это означает, что в точке x=0 функция $y=|x|$ не имеет производной, хотя она и непрерывна в этой точке, поскольку

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

Таким образом, не всякая функция, непрерывная в некоторой точке x, дифференцируема в этой точке. Но легко показать, что любая функция непрерывна во всех точках x, в которых она дифференцируема.

Аудиторные занятия:

1. Найти производную функции $y=3x^2-2x^2+3x-1$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (2)).
2. Установить, будет ли функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывной и дифференцируемой в точке $x=0$.
3. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^4-3\sqrt[7]{x^3}+7/x^5+4$;

б) $y=x^3*\sin x$;

в) $y=(x^4+1)/(x^4-1)$;

г) y=$(x^5+3x-1)^4$;

д) $y=\sqrt[3]{((x^3+1)/(x^3-1))^2}$.

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x-2$ в точке с абсциссой $x_0=1$. (Ответ: $y-5x+4=0;\ 5y+x-6=0$.)
5. Найти углы, под которыми пересекаются линии, заданные уравнениями $y=x^2$ и $x^2+2y^2=3$. (Ответ: $90^0, 90^0$.)
6. Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций.

1) а) $y = x^3 \sin 3x$; б) $y = e^x tg 4x$;

в) $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x}$; г) $y = x ctg^2 7x$;

д) $y = 2^{-\cos^4 5x}$; е) $y = e^{arctg\sqrt{x}}$;

2) а) $y = \left(2^{x^4} - tg^4 x\right)^3$; б) $y = \ln^5\left(x - 2^{-x}\right)$;

в) $y = \sin\left(tg\sqrt{x}\right)$; г) $y = x \sin^2 x \cdot 2^{x^2}$;

д) $y = 2^{x/\ln x}$; е) $y = e^{arctg\sqrt{1+x^2}}$.

3) а) $y = e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $y = sh^3 x^2$;

в) $y = \left(2^{tg 3x} + tg 3x\right)^2$; г) $y = 3^{tg^3 5x}$.

Домашние задания:

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^3 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3$;

б) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x$;

в) $y = \sqrt{\left(x^3+1\right)/\left(x^3-1\right)}$.

г) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6$;

д) $y = \left(x^9+1\right)\cos 5x$;

е) $y = \left(\left(x^4+1\right)/\left(x^4-1\right)\right)^3$.

ж) $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2$;

з) $y = x^3 tgx \cdot e^{2x}$;

и) $y = \left(\sin^2 x\right)/\left(x^3+1\right)$.

2.Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln\left(x^2 - 4x + 4\right)$ в точке $x_0 = 1$. (Ответ: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

3. Воспользовавшись определением производной (см. Формулу (2)), найти производную функции $y = (3x-1)/(2x+5)$. (Ответ: $y' = 17/(2x+5)^2$.)

4. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t c, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s – в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени t = 0; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

5. Найти производные следующих функций.

а) $y = x \sin^3 3x$; б) $y = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$;

в) $y = \left(2^{\cos 3x} + \sin 3x\right)^3$; г) $y = x \cos^2 x \cdot \ell^{x^2}$.

д) $y = x^3 e^{tg 3x}$; е) $y = \left(\sin^3 x + \cos^3 2x\right)^2$;

ж) $y = \ln\left(x^4 - \sin^3 x\right)$; з) $y = x \sin 7x \cdot tg^2 x$.

и) $y = x ctg^2 5x$; к) $y = \left(x^3 + tg^3 2x\right)^2$;

л) $y = \sin\left(x^5 - tg^2 x\right)$; м) $y = x^3 \cos 2x \cdot e^{-x^2}$.